



شماره صندلی:

سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

## دوره آموزشی طلا کشوری ۱۴۰۰

### پاسخ برگ آزمون المپیاد زیست شناسی

آزمون شماره	نام آزمون	تاریخ برگزاری	تعداد سوالات	مدت پاسخ گویی
۲	مدلسازی	۴۰۰/۱۲/۱۸	۵	۱۳۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی خود را فقط در کادر زیر بنویسید :

نام :	نام خانوادگی :	امضاء:
-------	----------------	--------

**تذکرات :** قبل از پاسخگویی به سوالات مطالب زیر را به دقت مطالعه نمایید.

- ۱- نام و نام خانوادگی خود را فقط در کادر بالا بنویسید (نوشتن مشخصات یا هر نوع علامت گذاری روی سایر برگه ها، تقلب محسوب خواهد شد).
- ۲- قبل از شروع آزمون همه برگه های دفترچه پاسخ برگ و سوال را بررسی و در صورت وجود کمبود یا نقصی مسئول جلسه را مطلع نمایید .
- ۳- پاسخ هر سوال با خودکار آبی یا مشکی صرفا داخل پاسخ برگ مخصوص همان سوال نوشته شود (هیچ مطلبی در حواشی برگه ها ننویسید).
- ۴- در صورت نیاز به برگ اضافه، مسئول جلسه را مطلع نمایید .
- ۵- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت،... و لوازم الکترونیکی ممنوع است. وسایلی مانند: تلفن همراه، لپ تاپ و ... حتی اگر خاموش باشد یا از آن استفاده نشود، مصداق تقلب بوده و برابر مقررات رفتار خواهد شد.
- ۶- استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

برگ است.

تعداد برگ اضافه این دفترچه

در این کادر چیزی ننویسید

در این صفحه

هیچ مطلبی ننویسید

مطالب مندرج در این صفحه ، تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد .



## بخش ریاضیات:

(الف)

1-

$$\frac{1}{(\sqrt{t}-1)^2 \sqrt{t}}$$

2-

$$\frac{2^{\frac{4}{3}} \cos(3x)}{\sqrt[3]{\sin(3x)}}$$

3-

$$-a^3 \cos(ax+b)$$

4-

$$-\frac{56}{\pi^3} + 2^{\frac{3}{2}} - 4$$

5-

$$2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

6-

$$(x^2 - 2x + 2) e^x + C$$

7-

$$2e^2 - 2$$

(ب)

معادله‌ی  $x_n$  برحسب  $x_i$  ها (۳ نمره)

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$$

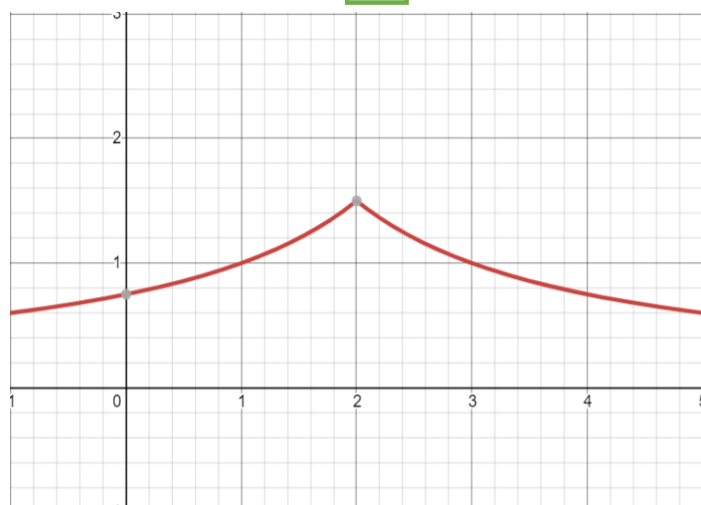
معادله‌ی  $x_n$  برحسب  $n$  (۳ نمره)

$$x_n = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \right) (2 - \sqrt{3})^n + \left( \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) (2 + \sqrt{3})^n$$

معادله‌ی  $y_n$  برحسب  $n$  (۳ نمره)

$$y_n = \left( \frac{3\sqrt{3} + 4}{2} \right) (2 + \sqrt{3})^n - \left( \frac{3\sqrt{3} - 4}{2} \right) (2 - \sqrt{3})^n$$

C



## بخش مدلسازی:

سوال یک:

(الف)

۱ - (۱۵ نمره)

X

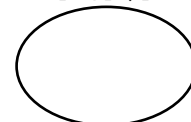
- نام محورهای مختصات را مشخص کنید. (۰.۵ نمره)
- مختصات دو نقطه‌ی روی نمودار را بنویسید. (۱ نمره)
- نمودار به طور تقریبی رسم کنید. (۱۰ نمره)

نام تجدیدنظر کننده:  
نمره به عدد:  
نمره به حروف:  
امضا:

نام مصحح دوم:  
نمره به عدد:  
نمره به حروف:  
امضا:

نام مصحح اول:  
نمره به عدد:  
نمره به حروف:  
امضا:

در این کادر چیزی ننویسید



$x_{\text{مبدا انتشار}} =$  2 (۳ نمره)

غلظت در مبدا انتشار : 1.5 (۰.۵ نمره)

۲- (۱ نمره)

$x_{\text{مبدا انتشار}} =$  0

۳- (۶ نمره)

$v_B(t) =$   $\frac{1}{2\sqrt{t}}$   $v_B(x) =$   $\frac{1}{2x}$   
(۲ نمره) (۴ نمره)

۴- (۶ نمره)

$v_B(C) =$   $\frac{c}{2(b-ac)}$

۵- (۲ نمره)

0  $< C <$   $b/a$

۶- (۴ نمره/نمره منفی: ۶)

نادرست ☒ (۲ نمره/نمره منفی: ۳)

☐ -a درست

نادرست ☒ (۲ نمره/نمره منفی: ۳)

☐ -b درست

(ب)

۱- (۴ نمره/نمره منفی: ۶)

☐ b

☒ a

گزینه‌ی درست:

سوال دو:

(الف)

۱- (۶ نمره/نمره منفی: ۱۰)

نادرست ☐ (۱ نمره/نمره منفی: ۱)

☒ -a درست

نادرست ☐ (۱ نمره/نمره منفی: ۱)

☒ -b درست

نادرست ☒ (۲ نمره/نمره منفی: ۴)

☐ -c درست

نادرست ☐ (۲ نمره/نمره منفی: ۴)

☒ -d درست

در این کادر چیزی ننویسید





(ب)

۱- (۶ نمره)

تعداد حالات تعادل :

4

مختصات  $(x, y)$  هر کدام :  $(0, 0)$   $(\frac{\gamma}{\mu}, 0)$   $(0, \frac{g}{\alpha})$   $(\frac{\alpha g + \gamma m}{m\mu - \alpha\alpha}, \frac{\gamma - \mu x_n}{-\alpha})$ 

۲- (۶ نمره)

ماتریس ژاکوبین :

$$\begin{pmatrix} 1 + \gamma - \mu x + \alpha y & \alpha x \\ \alpha y & 1 + g - \mu y + \alpha x \end{pmatrix}$$

ماتریس ژاکوبین بازنویسی :

$$\begin{pmatrix} \gamma - \mu x + \alpha y & \alpha x \\ \alpha y & \gamma - \mu y + \alpha x \end{pmatrix}$$

۳- (۸ نمره)

به ازای هر تعداد نقطه تعادلی که پیدا کردید، بنویسید.

مختصات نقطه تعادل ۱:  $(0, 0)$  :tr A ۲ :det A ۲ $\lambda_{1,2} =$ 

2

مختصات نقطه تعادل ۲:  $(\frac{\gamma}{\mu}, 0)$  :tr A  $\gamma + \frac{\alpha}{\mu}$  :det A 0 $\lambda_{1,2} =$  $2 + \frac{\alpha}{2}, 0$ 

در این کادر چیزی ننویسید



مختصات نقطه تعادل ۳:  $\begin{pmatrix} 0, \frac{9}{m} \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 0, \frac{1}{4} \end{pmatrix}$   $\text{tr } A: 2 + \frac{2}{\gamma}$   $\det A: 0$   $\lambda_{1,2} = 2 + \frac{2}{2} \text{ و } 0$

مختصات نقطه تعادل ۴:  $\begin{pmatrix} \frac{2+\alpha}{4-2\alpha}, \frac{2+\alpha}{4-2\alpha} \end{pmatrix}$   $\text{tr } A: \frac{-2(\alpha+\alpha+\alpha\alpha)}{4-2\alpha}$   $\det A: 0$   $\lambda_{1,2} = -\frac{(\alpha+\alpha+\alpha\alpha)}{4-\alpha\alpha} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{-2(\alpha+\alpha+\alpha\alpha)}{4-\alpha\alpha}\right)^2}$

۴- (۲ نمره)

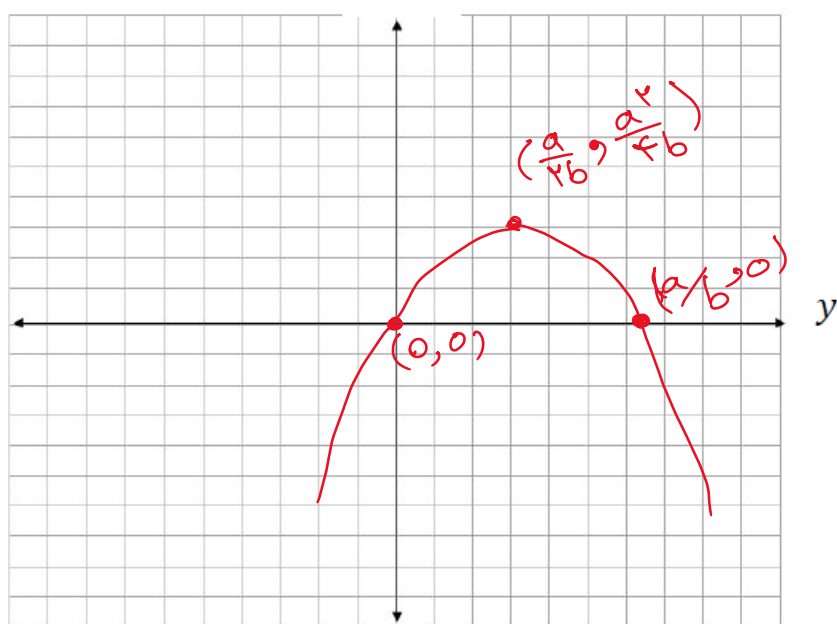
بازهی مقادیر ویژه:  $|\alpha| < 1$

۵- (۴ نمره)

مختصات نقطه تعادل | پایداری تعادل | شرط پایداری در صورت وجود

۱-	$(0, 0)$	ناپایدار	—
۲-	$(\frac{1}{2}, 0)$ $(\frac{\gamma}{\mu}, 0)$	بستگی دارد	$-9 < \alpha < -2$
۳-	$(0, \frac{9}{m})$ $(0, \frac{1}{2})$	بستگی دارد	$-9 < \alpha < -2$
۴-	$(\frac{2+\alpha}{4-\alpha\alpha}, \frac{2+\alpha}{4-\alpha\alpha})$	بستگی دارد	$ \frac{2(\alpha+\alpha+\alpha\alpha)}{4-\alpha\alpha}  < 1$

$\frac{dy}{dt}$



سوال سه:

(الف)

۱- (۴ نمره)

در این کادر چیزی ننویسید





ماکزیمم:  $(\frac{a^2}{4b}, \frac{a}{2b})$

مختصات مینیممها و ماکزیممها در صورت وجود:

۲- (۲ نمره)

مختصات نقاط بحرانی:

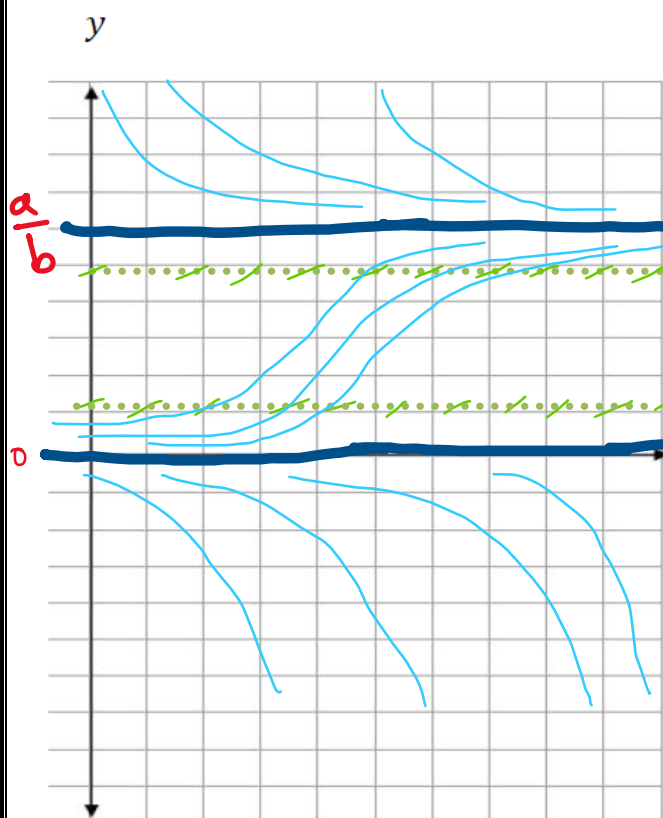
$(0, \frac{a}{b})$

$(0, 0)$

۳- (۲ نمره)



۴- (۹ نمره)



i. null-clineها در صورت وجود

ii. ایزوکلاینی که null-cline نباشند

iii. مقادیر تعادل و نوع پایداری تعادل حول آنها

iv. رسم چند خم جواب معادله در هر یک از

محدوده‌ها (توجه کنید که شمای کلی و تغییرات

کلی شیب جواب‌ها باید مشخص باشند) (حداقل سه

نوع متفاوت خم جواب رسم کنید)

در این کادر چیزی ننویسید



۵- (۷ نمره/نمره منفی: ۱)

(۲ نمره/نمره منفی: ۳)



نادرست

(۱ نمره/نمره منفی: ۲)



نادرست

(۳ نمره/نمره منفی: ۴)



نادرست

(۱ نمره/نمره منفی: ۲)



نادرست



a. درست



b. درست



c. درست



d. درست

(ب)

۱- (۲ نمره)

$$\frac{dy}{dt} =$$

$$ay - by^2 - h$$

۲- (۶ نمره)

حالت

بازه یا مقادیر h

$$\frac{a^2}{4b} > h$$

i.

$$\frac{a^2}{4b} = h$$

ii.

$$\frac{a^2}{4b} < h$$

iii.

در این کادر چیزی ننویسید

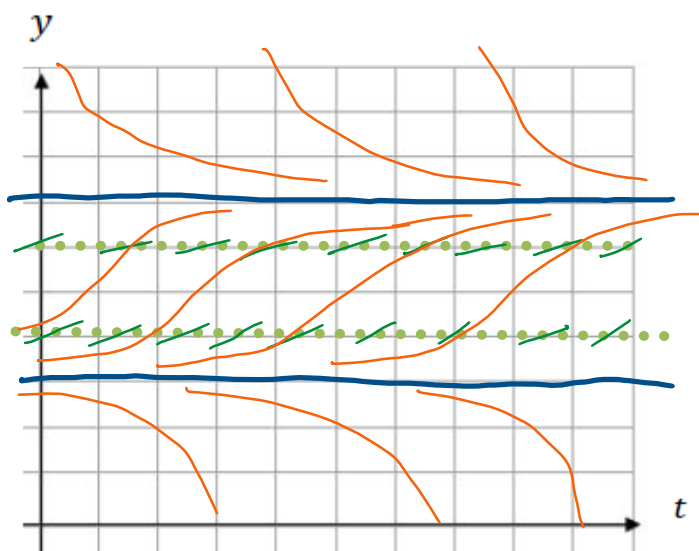




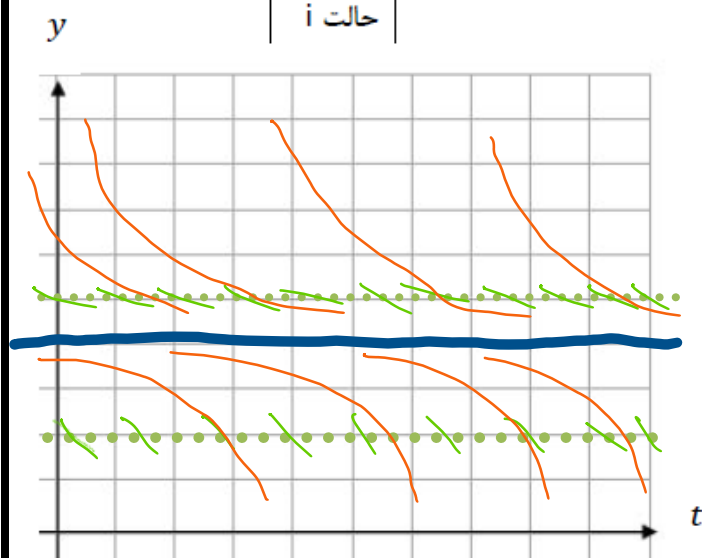


۳- (۹ نمره) ←

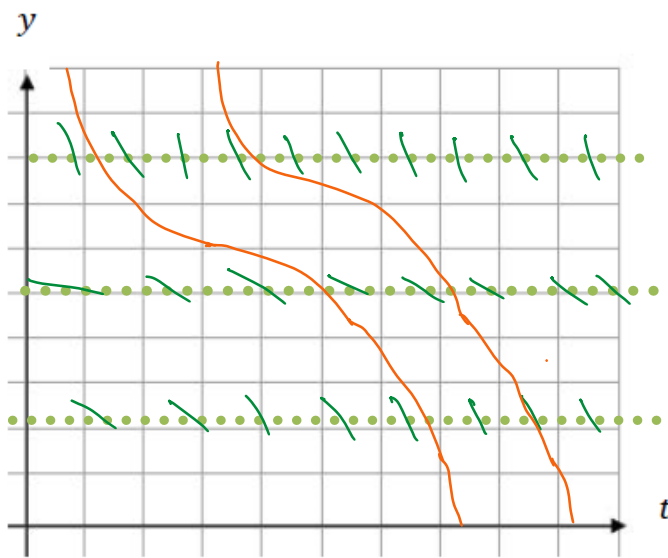
- i. null-cline ها در صورت وجود  
 ii. ۲ ایزوکلاینی که null-cline نباشند  
 iii. رسم چند جواب معادله در هر یک از  
 محدوده ها (توجه کنید که شمای کلی و تغییرات  
 کلی شیب جواب ها باید مشخص باشند)



حالت i



حالت ii



حالت iii

$$h_{Max} = \frac{a^2}{4b}$$

۴- (۱ نمره)

سوال چهار:

a) (4 points)

equation in "Reduced Standard form":

$$\ddot{y} + ky = kx$$

b) (2 points)

 $\omega =$ 

$$\frac{1}{2}$$

در این کادر چیزی ننویسید



c) (14 points)

integrating factor (u) :

$$Ce^{kt} \leq e^{kt}$$

x(t) :

$$\frac{2k \sin(t/2) + 4k^2 \cos(t/2)}{1 + 4k^2} + Ce^{-kt}$$

d) (10 points)

write all steps

پاسخ کامل به طریق زیر است، اما  
نوشتن همه گام‌های پاسخ زیر  
ضروری نیست.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \frac{e^{kt} \cdot (w \sin(wt) + k \cos(wt))}{w^2 + k^2} + c \right] \\ &= \frac{1}{w^2 + k^2} \cdot \frac{d}{dt} [e^{kt} \cdot (w \sin(wt) + k \cos(wt))] + \frac{d}{dt} [c] \\ &= \frac{\frac{d}{dt} [e^{kt}] \cdot (w \sin(wt) + k \cos(wt)) + e^{kt} \cdot \frac{d}{dt} [w \sin(wt) + k \cos(wt)]}{w^2 + k^2} + 0 \\ &= \frac{e^{kt} \cdot \frac{d}{dt} [kt] \cdot (w \sin(wt) + k \cos(wt)) + \left( w \cdot \frac{d}{dt} [\sin(wt)] + k \cdot \frac{d}{dt} [\cos(wt)] \right) e^{kt}}{w^2 + k^2} \\ &= \frac{e^{kt} k \cdot \frac{d}{dt} [t] \cdot (w \sin(wt) + k \cos(wt)) + \left( w \cos(wt) \cdot \frac{d}{dt} [wt] + k \cdot (-\sin(wt)) \cdot \frac{d}{dt} [wt] \right) e^{kt}}{w^2 + k^2} \\ &= \frac{e^{kt} k \cdot 1 \cdot (w \sin(wt) + k \cos(wt)) + \left( w \cos(wt) w \cdot \frac{d}{dt} [t] - kw \cdot \frac{d}{dt} [t] \cdot \sin(wt) \right) e^{kt}}{w^2 + k^2} \\ &= \frac{(w^2 \cos(wt) \cdot 1 - kw \sin(wt)) e^{kt} + ke^{kt} \cdot (w \sin(wt) + k \cos(wt))}{w^2 + k^2} \\ &= \frac{e^{kt} \cdot (w^2 \cos(wt) - kw \sin(wt)) + ke^{kt} \cdot (w \sin(wt) + k \cos(wt))}{w^2 + k^2} \end{aligned}$$

Alternative result:

$$= \frac{e^{kt} \cdot (w^2 \cos(wt) - kw \sin(wt))}{w^2 + k^2} + \frac{ke^{kt} \cdot (w \sin(wt) + k \cos(wt))}{w^2 + k^2}$$

Simplify/rewrite:

$$e^{kt} \cos(wt)$$

در این کادر چیزی ننویسید

